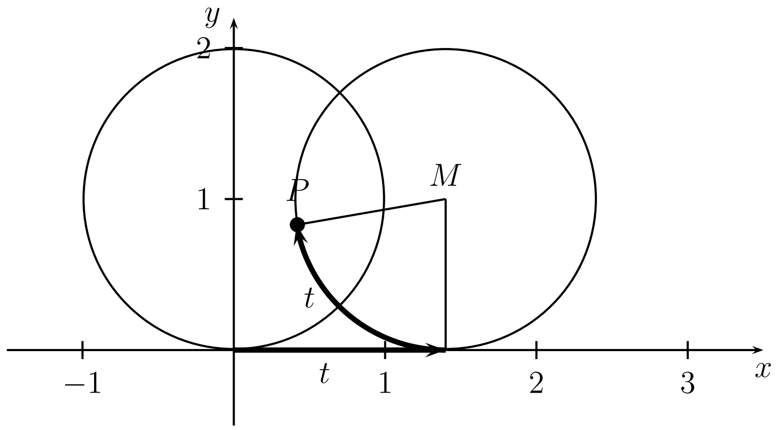
Die gewöhnliche Zykloide

Die *gewöhnliche Zykloide* wird von einem Punkt eines Kreises beschrieben, der ohne zu gleiten auf einer Geraden abrollt. In der Zeichnung ist es für einen Einheitskreis gezeigt. Zu Beginn soll der Punkt P im Ursprung liegen. Der rechte Kreis zeigt die Lage von P nach dem Abrollen der Bogenlänge t, die hier gerade der Winkel im Bogenmaß ist.
Die Lage von P bezüglich des Mittelpunktes ist $P(-\sin t| -\cos t)$. Der Mittelpunkt ist beim Abrollen des Bogens t um t nach rechts gewandert. Er wird also im Koordinatensystem durch $M(t|1)$ beschrieben. Damit ergibt sich die Lage von P bezüglich des Koordinatensystems durch $P(t-\sin t|1-\cos t)$. Die Gleichung der gewöhnlichen Zykloide in Parameterform ($r=1$) ist dann

$$x(t) = t - \sin t$$

$$y(t) = 1 - \cos t$$

Für $t \in [0; n \cdot 2\pi]$ erhält man n Umdrehungen.



Für einen Kreis mit dem Radius r erhält man beim Abrollen um den Winkel t eine Bogenlänge rt. Die Lage von P bezüglich des Mittelpunktes ist dann $P(-r\sin t|-r\cos t)$. Der Mittelpunkt ist beim Abrollen um den Winkel t um rt nach rechts gewandert. Er wird also im Koordinatensystem durch $M(rt|r)$ beschrieben. Damit ergibt sich die Lage von P bezüglich des Koordinatensystems durch $P(rt - r\sin t|r - r\cos t)$. Die Gleichung der gewöhnlichen Zykloide in Parameterform ist dann

$$x(t) = r(t - \sin t)$$

$$y(t) = r(1 - \cos t)$$

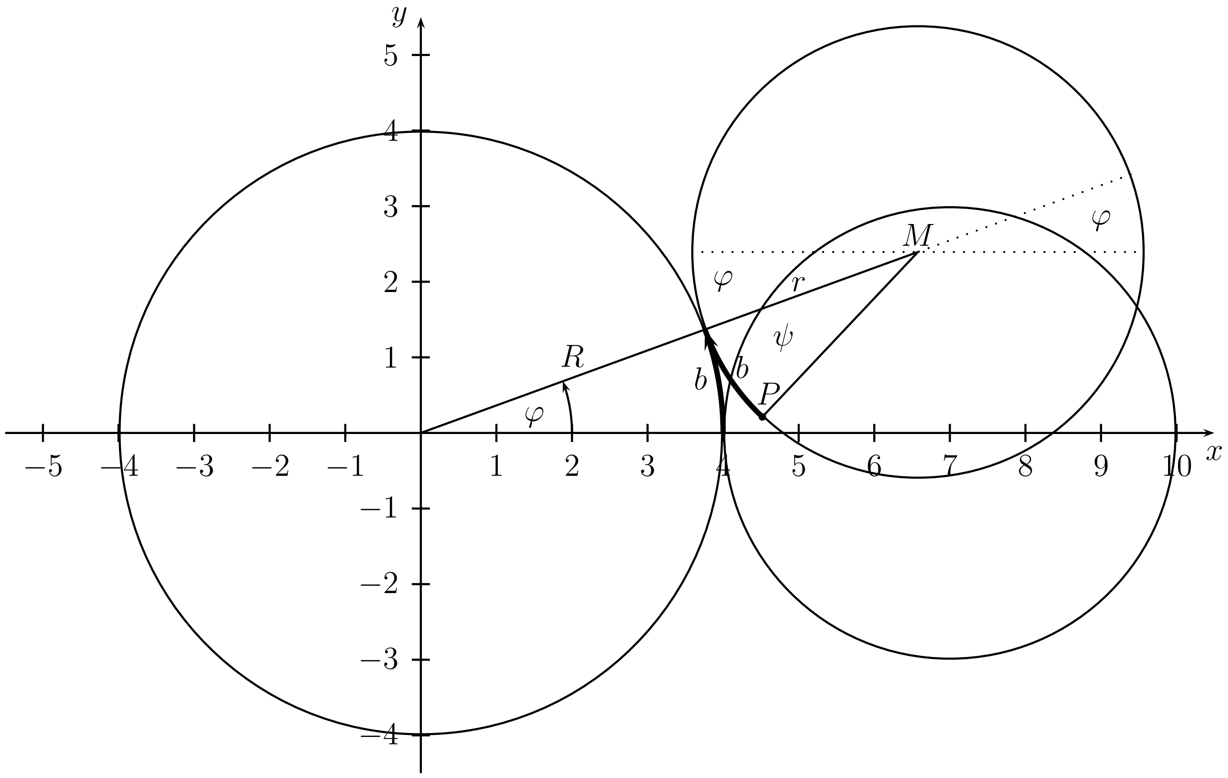
Die *verlängerte bzw. verkürzte Zykloide* (auch *Trochoide* genannt) erhält man, wenn sich der Punkt P mit dem Kreis bewegt, aber nicht auf der Kreislinie, sondern mit einem Faktor $\lambda > 1$ mit einem Radius $R = \lambda r > r$ außerhalb oder mit einem Faktor $0 < \lambda < 1$ mit einem Radius $R = \lambda r < r$ innerhalb des rollenden Kreises bewegt. Den letzten Fall kann man sich durch einen Punkt einer Speiche eines Rades vorstellen. Der Punkt P wird bezüglich M dann durch $P(-\lambda r \sin t| - \lambda r \cos t)$ beschrieben. Die Gleichung der verlängerten bzw. verkürzten Zykloide in Parameterform ist dann

$$x(t) = r(t - \lambda \sin t)$$

$$y(t) = r(1 - \lambda \cos t)$$

Die Epizykloide

Die *Epizykloide* wird von einem Punkt eines Kreises beschrieben, der ohne zu gleiten auf der Außenseite eines anderen Kreises abrollt.



Der Kreis mit Radius r rollt auf dem Kreis mit Radius R ab. Beim Start ist Punkt $P = P(R|0)$. Durch das Abrollen des Bogens b hat sich der Berührpunkt der Kreise um den Winkel φ gedreht. Der Punkt P hat sich dann bezüglich M um den Winkel $\varphi + \psi$ gedreht (Alle Winkelangaben im Bogenmaß!). Im festen Kreis gilt

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{b}{2\pi R} \Longrightarrow b = \varphi R$$

Im rollenden Kreis gilt

$$\frac{\psi}{2\pi} = \frac{b}{2\pi r} \Longrightarrow b = \psi r$$

Also folgt

$$\varphi R = \psi r \quad \text{und damit} \quad \psi = \frac{R}{r}\varphi$$

Die Lage von P bezüglich des Mittelpunktes ist $P(-r\cos(\varphi+\psi)| -r\sin(\varphi+\psi))$. Der Mittelpunkt hat sich beim Abrollen des Bogens b um den Winkel φ um den Ursprung gedreht. Er wird also im Koordinatensystem durch $M((R+r)\cos(\varphi)|(R+r)\sin(\varphi))$ beschrieben. Damit ergibt sich die Lage von P bezüglich des Koordinatensystems durch die Koordinaten

$$\begin{aligned}
x &= (R+r)\cos\varphi - r\cos(\varphi+\psi) \\
y &= (R+r)\sin\varphi - r\sin(\varphi+\psi) \quad \text{bzw.} \\
x &= (R+r)\cos\varphi - r\cos\left(\varphi + \frac{R}{r}\varphi\right) \\
y &= (R+r)\sin\varphi - r\sin\left(\varphi + \frac{R}{r}\varphi\right) \quad \text{bzw.} \\
x &= (R+r)\cos\varphi - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right) \\
y &= (R+r)\sin\varphi - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)
\end{aligned}$$

Ersetzen wir den Winkel φ durch den bei uns üblichen Parameter t, so erhalten wir die Parameterdarstellung der Epizykloide:

$$x(t) = (R+r)\cos t - r\cos\left(\frac{R+r}{r}t\right)$$

$$y(t) = (R+r)\sin t - r\sin\left(\frac{R+r}{r}t\right)$$

Der Punkt P kommt wieder an den Ausgangspunkt zurück (geschlossene Kurve), wenn bei $n \in \mathbb{N}$ Umdrehungen auf dem festen Kreis der Punkt P auf dem rollenden Kreis $m \in \mathbb{N}$ Umdrehungen macht:

$$n \cdot 2\pi \cdot R = m \cdot 2\pi \cdot r \quad \text{d.h.} \quad n = m \cdot \frac{r}{R}$$

Das ist nur möglich, wenn $\frac{r}{R}$ rational ist.

Wie schon bei der gewöhnlichen Zykloide gezeigt kann man den Punkt P sich außerhalb oder innerhalb des rollenden Kreises mitdrehend vorstellen. Entsprechend ist dann die Parameterdarstellung der *verlängerten bzw. verkürzten Epizykloide* durch

$$x(t) = (R+r)\cos t - \lambda r \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right)$$

$$y(t) = (R+r)\sin t - \lambda r \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right)$$

gegeben.

Die Hypozykloide

Die *Hypozykloide* wird von einem Punkt eines Kreises beschrieben, der ohne zu gleiten auf der Innenseite eines anderen Kreises abrollt. Die Parameterdarstellung ergibt sich sehr leicht aus der Parameterdarstellung der Epizykloide, indem man r durch $-r$ ersetzt:

$$x(t) = (R-r)\cos t + r \cos\left(\frac{R-r}{-r}t\right)$$

$$y(t) = (R-r)\sin t + r \sin\left(\frac{R-r}{-r}t\right)$$

Mit $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ ergibt sich schließlich vereinfacht

$$x(t) = (R-r)\cos t + r \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$

$$y(t) = (R-r)\sin t - r \sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$

Und für die *verlängerte bzw. verkürzte Hypozykloide* folgt dann analog zum Vorhergehenden mit dem Verlängerungs- bzw. Verkürzungsfaktor λ

$$x(t) = (R-r)\cos t + \lambda r \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$

$$y(t) = (R-r)\sin t - \lambda r \sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$