

Komplexe Zahlen

Bekannte Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

Die Zahlenmenge ist $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es gelten die folgenden Gesetze:

- Addition: $a + b \in \mathbf{N}$, wenn $a, b \in \mathbf{N}$.
- Multiplikation: $a \cdot b \in \mathbf{N}$, wenn $a, b \in \mathbf{N}$.
- Neutrales Element der Addition.: $a + 0 = a$.
- Neutrales Element der Multiplikation: $a \cdot 1 = a$.
- Kommutativgesetz der Addition.: $a + b = b + a$.
- Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$.
- Assoziativgesetz der Addition.: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Assoziativgesetz der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- Ordnungsstruktur: $a \leq b \iff$ Es gibt ein $c \in \mathbf{N}$ mit $a + c = b$. Jede Zahl hat einen Nachfolger. Alle Zahlen außer 0 haben einen Vorgänger.

Problem: Die Gleichung $a + x = b$ hat nur eine Lösung in \mathbf{N} , wenn $b \geq a$.

Ganze Zahlen

Alle Gesetze sollen weiterhin gelten und zusätzlich die Gleichung $a + x = b$ immer eine Lösung haben. Man muss Addition und Multiplikation entsprechend definieren.

Die Zahlenmenge ist $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Jede Zahl hat einen Nachfolger und einen Vorgänger.

Eine Ordnungsstruktur ist definiert durch $a \leq b \iff b - a \in \mathbf{N}$.

Die Gleichung $a + x = b$ hat die Lösung $x = b - a \in \mathbf{Z}$.

Problem: Die Gleichung $a \cdot x = b$ ist in \mathbf{Z} nicht immer lösbar.

Rationale Zahlen

Alle Gesetze sollen weiterhin gelten und zusätzlich die Gleichung $a \cdot x = b$ immer eine Lösung haben.

Die Zahlenmenge ist $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat die Lösung $x = \frac{b}{a}$, wenn $a \neq 0$.

Eine Ordnungsstruktur ist weiterhin vorhanden. Es gibt aber keinen Nachfolger und keinen Vorgänger einer rationalen Zahl.

Zu je zwei rationalen Zahlen a und b gibt es immer eine dritte rationale Zahl $c = \frac{a+b}{2}$, die zwischen a und b liegt. Man sagt: Die Menge \mathbb{Q} ist *dicht*.

Mit der folgenden Tabelle erreicht man, dass jede positive rationale Zahl an einer bestimmten Stelle der Tabelle erscheinen muss. Nun streiche man noch alle Brüche mit nicht teilerfremden Zählern und Nennern (Kürzen). Die übriggebliebenen Brüche kann man nun nummerieren, indem man in der linken oberen Ecke beginnt und über die Diagonalen (von links unten nach rechts oben und umgekehrt) geht.

	1	2	3	4	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$...
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$...
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Wechselt man beim Nummerieren bei jeder positiven Zahl noch zu ihrer negativen Gegenzahl und gibt dieser die folgende Nummer, erreicht man schließlich, dass jede rationale Zahl eine Nummer bekommen kann. In diesem Sinne sind die Mengen \mathbb{Q} und \mathbb{N} *gleichmächtig*. Man sagt: Die Menge \mathbb{Q} ist *abzählbar*.

Im naiven Sinne würde man sagen, dass es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen gibt. Diese anschauliche Vorstellung ist problematisch, da beide Mengen unendlich viele Elemente enthalten.

Problem: Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a \geq 0$ ist in \mathbb{Q} nicht immer lösbar.

Reelle Zahlen

Es stellt sich heraus, dass die Lösungen der Gleichung $x^2 = a$ mit $a \geq 0$ *irrational* sind, wenn a keine Quadratzahl ist. Fügt man alle irrationalen Zahlen mit den rationalen Zahlen zusammen, erhält man die Menge \mathbb{R} der *reellen Zahlen*.

Es stellt sich nun die Frage, ob man die Elemente der neuen „größeren“ Menge immer noch nummerieren kann. Beschränkt man sich bei dieser Fragestellung auf die „etwas

kleinere“ Menge der reellen Zahlen im Intervall $]0; 1[$, kann man folgende Überlegung anstellen. Man schreibe in Gedanken alle möglichen reellen Zahlen dieses Intervalls in einer unendlich langen Liste auf. Man nehme also an, dass diese Liste vollständig sei.

0,146578932408768...

0,536509456234751...

0,948576362719857...

0,111222333444555...

0,192847465683627...

...

Mit dieser Liste wird nun eine Zahl x nach folgendem Verfahren konstruiert: Die Zahl x erhält an der

- 1. Nachkommastelle eine andere Ziffer als die 1. Zahl in der Liste, also z.B. eine 2. Dann kann x nicht gleich der 1. Zahl der Liste sein.
- 2. Nachkommastelle eine andere Ziffer als die 2. Zahl in der Liste, also z.B. eine 4. Dann kann x nicht gleich der 2. Zahl der Liste sein.
- n -ten Nachkommastelle eine andere Ziffer als die n -te Zahl in der Liste. Dann kann x nicht gleich der n -ten Zahl der Liste sein.

Die so für unendlich viele Nachkommastellen konstruierte Zahl x unterscheidet sich von allen in der Liste vorkommenden Zahlen, ist aber eine Zahl, die eigentlich in die Liste gehört. Also ist die Annahme falsch, dass die Liste vollständig ist. Wir können also die reellen Zahlen nicht nummerieren. Die Menge \mathbb{R} ist nicht abzählbar. Man sagt: Die Menge der reellen Zahlen ist *überabzählbar*.

Das ist ein einigermaßen erstaunliches Ergebnis. Die Menge \mathbb{Q} ist dicht, d.h. zwischen je zwei beliebig nahe beieinander liegenden rationalen Zahlen finden wir noch unendlich viele weitere rationale Zahlen. Im naiven Sinne betrachtet bliebe eigentlich gar kein Platz mehr für weitere Zahlen. Trotzdem finden wir in jedem Intervall sogar noch „viel, viel mehr“ weitere Zahlen.

Es bleibt ein weiteres Problem: Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist in \mathbb{R} nicht immer lösbar. Beispielsweise ist die Gleichung $x^2 = -1$ in \mathbb{R} nicht lösbar.

Definition der komplexen Zahlen

Wenn wir keine bekannte Zahl kennen, die quadriert -1 ergibt, dann müssen wir uns eben eine solche Zahl *erfinden*. Auf den ersten Blick ist dies ein recht merkwürdiges Vorgehen. Wie kann man eine Zahl „erfinden“, die es „gar nicht gibt“? Auf den zweiten Blick erkennt man aber, dass *alle* Zahlen reine Erfindungen oder geistige Konstruktionen sind. Die Mathematik ist die reinste Geisteswissenschaft und hat eigentlich gar nichts mit

der Wirklichkeit zu tun. Dass man mit der Mathematik trotzdem etwas in der Realität anfangen kann, ist mehr oder weniger ein Wunder!

In diesem Sinne sind dann die Skrupel, die man hat, „mit Gewalt“ eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ zu erzwingen, doch nicht so groß.

Imaginäre Zahlen

Wir definieren nun also eine Zahl, deren Quadrat -1 ergeben soll. Sie wird *imaginäre Einheit* genannt und mit i bezeichnet. Es ist also

$$i^2 = -1$$

Damit ist die Zahl i eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Dann folgt aber auch

$$(-i)^2 = ((-1) \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = i^2 = -1$$

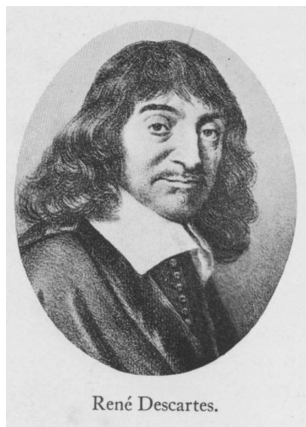
wenn die Potenzgesetze weiterhin gültig bleiben sollen. Also hat die Gleichung $x^2 = -1$ die Lösungen i und $-i$.

Zahlen der Form $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$ nennen wir *imaginäre Zahlen*.

Damit lässt sich die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = c$ mit $c < 0$ durch

$$L = \{\sqrt{|c|} \cdot i; -\sqrt{|c|} \cdot i\}$$

angeben.

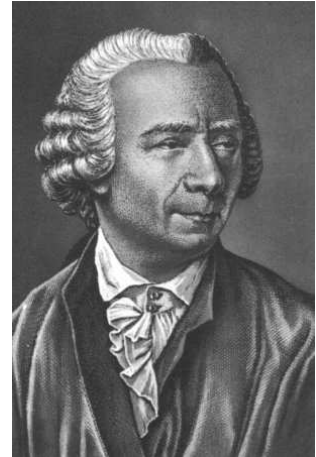


René Descartes.

Der Name und die Bezeichnung der Zahl mit i gehen auf den französischen Philosophen und Mathematiker RENÉ DESCARTES (1596–1650) zurück. Noch bis ins 19. Jahrhundert hinein war für die Mathematiker eine Zahl, deren Quadrat -1 ergibt, „unvorstellbar“. Da diese Zahlen aber als Wurzeln von negativen Zahlen in Rechnungen auftraten und auch sinnvoll damit umgegangen werden konnte, wurden sie als „eingebildete Zahlen“ (numeri imaginarii) bezeichnet.

„Endlich bemerken wir, dass sowohl die wahren wie die falschen Wurzeln einer Gleichung nicht immer reell, sondern manchmal nur imaginär sind, d.h. man kann sich zwar alle Male bei jeder beliebigen Gleichung so viele Wurzeln, wie ich angegeben habe, vorstellen, aber manchmal gibt es keine Größen, die den so vorgestellten entsprechen.“

Der schweizerische Mathematiker LEONHARD EULER (geboren am 15.04.1707 in Basel und gestorben am 18.09.1783 in Petersburg) rechnete meisterhaft mit den komplexen Zahlen und fand einige sehr grundlegende Eigenschaften dieser Zahlen. „...und so ist klar, dass die Quadrat-Wurzeln von Negativ-Größen nicht einmal unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müssen wir sagen, dass dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich imaginäre Zahlen oder eingebildete Zahlen genennt werden, weil sie bloss allein in der Einbildung statt finden.“ Für alle Zeiten hat er sich in der berühmten Formel



$$e^{i\pi} = -1$$

verewigt, die die nach ihm benannte *Eulersche Zahl* e und die Kreiszahl π enthält (näheres dazu später).

Die imaginären Zahlen alleine reichen noch nicht ganz.

Wir suchen eine Zahlenmenge als Erweiterung von \mathbf{R} . Reelle Zahlen und imaginäre Zahlen muss man addieren und subtrahieren können. Wir definieren also die Menge der komplexen Zahlen durch

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{R}; i^2 = -1\}.$$

Dann sind alle Grundrechenarten mit Zahlen aus \mathbb{C} möglich und das Ergebnis einer Rechnung ist wieder eine Zahl in \mathbb{C} .

Es sei $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$

- Addition

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

- Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

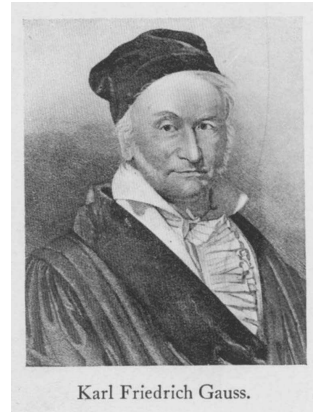
- Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i \end{aligned}$$

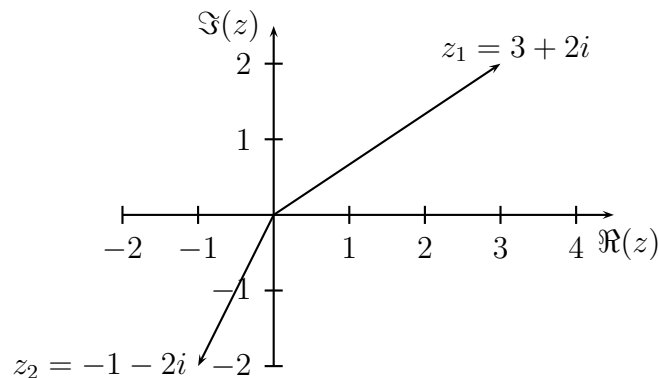
Komplexe Zahlenebene und Bezeichnungen

Erst der große Mathematiker CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) verschaffte den komplexen Zahlen die volle Anerkennung. Auf ihn geht auch die Bezeichnung *komplexe Zahl* zurück.

„So wie man sich das ganze Reich aller reeller Größen durch die unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abscisse = a Ordinate = b bestimmt, die Größe $a + bi$ gleichsam repräsentiert.“



Wir fügen dem reellen Zahlenstrahl einfach einen imaginären Zahlenstrahl hinzu und erhalten damit für die komplexen Zahlen zur Veranschaulichung eine Zahlenebene, auch *Gaußsche Zahlenebene* genannt.



Einige Bezeichnungen: Ist $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, dann

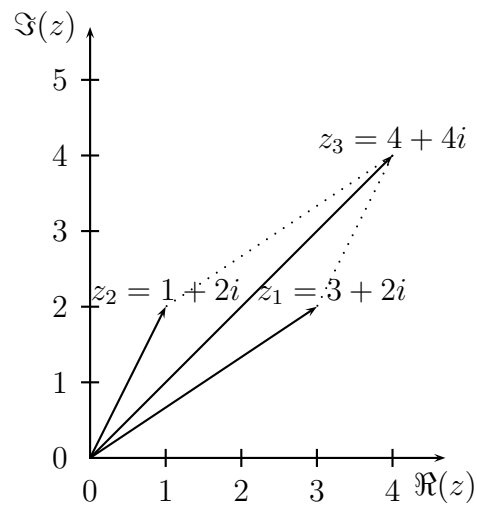
- heißt a der *Realteil* der komplexen Zahl: $a = \Re(z)$.
- heißt b der *Imaginärteil* der komplexen Zahl: $b = \Im(z)$.
- heißt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ der *Betrag* der komplexen Zahl. Wie im Fall des reellen Zahlenstrahls ist der Betrag der Abstand des Punktes vom Ursprung.
- nennt man $\bar{z} = a - bi$ die zu z *konjugiert-komplexe* Zahl. Es gilt:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \quad \text{d.h.} \quad z\bar{z} = |z|^2$$

Veranschaulichung der Addition

Denkt man sich die komplexen Zahlen als Vektoren (wie in der Physik), so stellt man fest, dass die Addition von zwei komplexen Zahlen der vektoriellen Addition (Parallelogrammregel) von Vektoren entspricht. Beispiel:

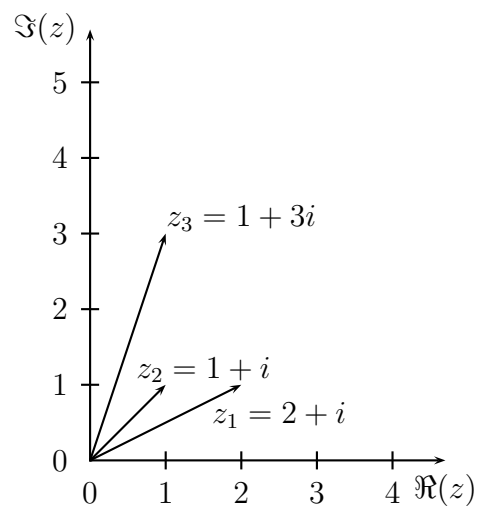
$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 3 + 2i \\ z_2 = 1 + 2i \end{array} \right\} \Rightarrow z_3 = z_1 + z_2 = 4 + 4i$$



Veranschaulichung der Multiplikation

Beispiel:

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 1 + i \end{array} \right\} \Rightarrow z_3 = z_1 \cdot z_2 = 1 + 3i$$



Misst man die Längen der Strecken, so kann man vermuten, dass die Einzellängen multipliziert werden müssen. Nachweis:

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ |z_2| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ |z_3| &= \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

Beweis für zwei beliebige komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + y_1i$ und $z_2 = x_2 + y_2i$:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)| \\ &= |x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i - y_1y_2| \\ &= |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)| \\ &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} \cdot \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

Durch weiteres Messen kann man vermuten, dass sich die Winkel gegenüber der positiven x -Achse bei der Multiplikation der komplexen Zahlen addieren. Dies können wir hier nicht beweisen, da wir die Trigonometrie in der Klasse 10 noch nicht zur Verfügung haben.

Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten

Die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{R}$$

ist in \mathbb{C} immer lösbar. Nach dem Verfahren der quadratischen Ergänzung ergibt sich

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

$$x + \frac{p}{2} = \pm i \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm i \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

Achtung mit den Wurzeln!

Für reelle Zahlen ist die Wurzel einer nicht-negativen Zahl **eindeutig** definiert. Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a \geq 0$ besitzt zwar zwei Lösungen \sqrt{a} und $-\sqrt{a}$. Die Wurzel aus a ist aber definiert als die **nicht-negative** Lösung der Gleichung.

Nun könnte man vermuten, dass man $i = \sqrt{-1}$ definieren kann, ohne dass es irgendwelche Widersprüche gibt. Das ist nicht der Fall, wenn wir weiterhin die Gültigkeit von Rechengesetzen für Wurzeln retten wollen.

Versuch 1: Annahme: $i = \sqrt{-1}$. Dann folgt

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Das war wohl nichts!

Versuch 2: Annahme: $-i = \sqrt{-1}$. Dann folgt

$$-1 = (-i) \cdot (-i) = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Und es geht schon wieder schief!

Fazit: Wenn wir die Wurzeln eindeutig festlegen wollen, dann können wir die Rechengesetze für Wurzeln nicht retten, weil sich Widersprüche ergeben.

Ausweg: Die Wurzel aus -1 ist ***i* oder $-i$** .