# Vorüberlegungen

### Aus der Geschichte der Mathematik

Carl Friedrich Gauss wurde als Sohn armer Eltern am 30. April 1777 in Braunschweig geboren und starb am 23. Februar 1855 in Göttingen. Sein Motto lautete: „Pauca sed matura“ (Weniges, aber Reifes). Klassisch ist die Geschichte in der Schule, als der Lehrer den zehnjährigen Schülern die Aufgabe gibt, die Summe aller Zahlen von 1 bis 100 zu errechnen. Es dauerte einige Sekunden und C.F. Gauss legte seine Schiefertafel auf den Tisch. Am Ende der Stunde war seine Zahl die einzig richtige.

1. Wie hat er das so schnell gemacht?
2. Leite eine Formel für die Summe aller natürlichen Zahlen bis zu einer Zahl $n$ her:

   $$s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i =$$

3. Zeige: Bei einer arithmetischen Folge ist das arithmetische Mittel aus dem ersten und dem letzten Folgenglied genau so groß wie das arithmetische Mittel aus dem zweiten und dem zweitletzten Folgenglied usw.
4. Leite mit der Idee von Gauss eine Formel für eine arithmetische Reihe her:

   $$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i =$$

5. Schon mehrfach begegnete uns die folgende Formel: *Addiert man alle Zweierpotenzen beginnend beim Exponenten Null bis zu einem natürlichen positiven Exponenten, so ergibt sich die um eins verminderte Zweierpotenz mit dem nächstgrößeren Exponenten.*
   (a) Übersetze die „Formel“ in mathematische Schreibweise und gib einige Beispiele an.
   (b) Schreibe eine solche Summe $s_n$ ausführlich und auch den Term $2s_n$ und subtrahiere die beiden Terme. Was fällt auf?
   (c) Wie wandelt man rechnerisch einen periodischen Dezimalbruch wie $0{,}\overline{5}$ in einen Bruch mit Zähler und Nenner um?
   (d) Benutze diese Ideen zur Herleitung der Summenformel für die geometrische Reihe.

## Summenformeln

Die zur arithmetischen Folge $(a_n)$ gehörige Reihe heißt **arithmetische Reihe** $(s_n)$.

$$s_n = (a_1) + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) = \sum_{i=1}^{n}(a_1 + (i-1)d)$$

Es gilt:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Die zur geometrischen Folge $(a_n)$ gehörige Reihe heißt **geometrische Reihe** $(s_n)$.

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \left(1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1}\right) = a_1 \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}$$

Es gilt:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{für} \quad q \neq 1.$$

## Aufgaben

1. Angegeben sind jeweils die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge. Ergänze bis zum 5. Glied umd gib auch bis zum 5. Glied die zugehörige geometrische Reihe an (ohne Summenformel).

   (a) $2; 6; 18; \ldots$

   (b) $4; 3; \frac{9}{4}; \ldots$

   (c) $60; -30; 15; \ldots$

2. Gib die ersten 5 Glieder der zugehörigen geometrischen Reihe an.

   (a) $a_1 = 6; q = 0{,}1$

   (b) $a_1 = 1; q = 0{,}4$

   (c) $a_1 = -10; q = -1{,}5$

   (d) $a_1 = \sqrt{2}; q = 2$

   (e) $a_1 = 2; q = \sqrt{2}$

   (f) $a_1 = \sqrt{2}; q = \sqrt{3}$

3. Angegeben sind jeweils die ersten drei Glieder einer geometrischen Reihe. Ergänze bis zum 5. Glied umd gib auch bis zum 5. Glied die zugehörige geometrische Folge an (ohne Summenformel).

   (a) $2; 8; 26; \ldots$

   (b) $10; 30; 70; \ldots$

(c) $4; 6; 7; \ldots$

(d) $-4; 8; -28; \ldots$

(e) $4; 5; 5{,}25; \ldots$

(f) $\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{13}{24}; \ldots$

4. Gib die folgenden periodischen Dezimalbrüche als Bruch mit Zähler und Nenner an

$0{,}\overline{6}$ $\quad 0{,}\overline{1}$ $\quad 0{,}\overline{5}$ $\quad 0{,}\overline{10}$ $\quad 0{,}\overline{27}$ $\quad 0{,}\overline{09}$

$0{,}\overline{06}$ $\quad 0{,}\overline{037}$ $\quad 0{,}\overline{185}$ $\quad 0{,}\overline{001}$ $\quad 0{,}1\overline{9}$ $\quad 1{,}8\overline{3}$

5. $(a_n)$ und $(b_n)$ seien geometrische Folgen. Gilt dies auch für die Folge $(c_n)$ mit

(a) $c_n = a_n^2$

(b) $c_n = \sqrt{a_n}$

(c) $c_n = a_n + 1$

(d) $c_n = a_n \cdot b_n$

6. Berechne soweit wie möglich folgende geometrische Reihen:

(a) $1 + 4 + 16 + \cdots + 4^{10} =$

(b) $4 + 2 + 1 + \cdots + \frac{1}{2^{17}} =$

(c) $3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{25} - + \cdots + \frac{3}{390625} =$

(d) $-2 + 4 - 8 + - \cdots + 4096 =$

(e) $\sum_{i=0}^{7} (-1)^i \left(\frac{1}{10}\right)^i =$

(f) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\frac{1}{x}\right)^i =$

(g) $\sum_{\nu=1}^{n} q^{2\nu-1} =$

(h) $\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{q^k} =$

(i) $\sum_{i=17}^{33} 2^i =$

7. Wie groß ist die Summe der ersten 7 Glieder in den folgenden geometrischen Reihen:

(a) $2 - \frac{1}{2} + - \cdots$

(b) $-\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - + \cdots$

8. In einer geometrischen Folge mit dem ersten Folgenglied 1 ist das dritte Glied um 6 größer als das zweite Glied. Berechne die Summe der geometrischen Reihe mit 7 Summanden.

9. Berechne die ersten fünf Glieder der geometrischen Folge, das allgemeine Glied $s_n$ der geometrischen Reihe und $s_5$!

   (a) $1 + 2 + 4 + \cdots$

   (b) $1 - 2 + 4 - \cdots$

   (c) $10 + 2 + 0{,}4 + \cdots$

   (d) $1000 - 100 + 10 - \cdots$

10. In einer geometrischen Reihe sei $a_1 = 1$ und $q = 1{,}1$. Ab welchem $n_0$ sind alle $s_n$ mit $n > n_0$ größer als 1000?

11. Man spricht in der Physik von einer gedämpften Schwingung, wenn die Amplitude mit der Zeit abnimmt. Ist die Luftreibung dominierend, so ergibt sich für die Amplitudenfolge $(a_n)$ annähernd eine geometrische Folge.

    (a) Welchen Weg legt der Körper eines Fadenpendels zurück bei der Ausgangsamplitude $a_1 = 10\,\text{cm}$ zurück, wenn die Amplitude nach jeder halben Schwingung um 10% kleiner wird?

    (b) Nach welcher Zeit ist die Amplitude kleiner als 1 mm, wenn die Schwingungsdauer $T = 2\,\text{s}$ ist?

12. In der Abbildung sind durch $O$ vier Geraden gezeichnet, die den Vollwinkel in acht gleich große Teile teilen. Fällt man von einem beliebigen Punkt $P_1$ auf einer der Geraden das Lot auf eine Nachbargerade, erhält man auf dieser den Lotfußpunkt $P_2$. In entsprechender Weise findet man $P_3, P_4$ usw.

    (a) Zeige, dass die Folge der Streckenlängen $(a_n)$ eine geometrische Folge ist!

    (b) Zeige, dass die Folge der Streckenlängen $(p_n)$ mit $p_n = |\overline{OP_n}|$ eine geometrische Folge ist!

    (c) Zeichne die entsprechende Figur für eine Winkel $\alpha = 30°$!

    (d) Zeige, dass auch bei beliebigem Winkel $\alpha$ eine geometrische Folge entsteht!