Definitionen

Zu einer gegebenen Folge (a_n) lässt sich eine weitere Folge konstruieren, indem man die Folge der **Teilsummen** (s_n) nach folgendem Schema bildet:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Diese Folge der Teilsummen heißt **Reihe**. Man benutzt zur kurzen Darstellung von Reihen oft die Sigma-Schreibweise (Lies: Summe aller a_i von $i = 1$ bis n):

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Die zur arithmetischen Folge (a_n) gehörige Reihe heißt **arithmetische Reihe** (s_n).

$$s_n = (a_1) + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)d)$$

Die zur geometrischen Folge (a_n) gehörige Reihe heißt **geometrische Reihe** (s_n).

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}$$

Aufgaben

1. Benutze die Σ-Schreibweise zur Darstellung der Reihen:

   (a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$

   (b) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n =$

   (c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 =$

   (d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 =$

   (e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$

   (f) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 =$

(g) $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 =$

(h) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$

(i) $222222222222 =$

(j) $1{,}11111111111111 =$

2. Schreibe ausführlich:

(a) $\sum_{i=1}^{5}(3i+1) =$

(b) $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2^{k-1}} =$

(c) $\sum_{\nu=1}^{5}(-1)^{\nu-1} \cdot \nu^2 =$

(d) $\sum_{i=1}^{5} i =$

3. Was ist richtig, was ist falsch? Begründe die Gültigkeit der *Rechenregeln für Reihen* oder gib ein Gegenbeispiel bei einer falschen „Regel“ an.

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot a, \quad$ falls $\; a_i = a \;$ für alle $\; i$.

(b) $\sum_{i=1}^{n}(k \cdot a_i) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$

(c) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$

(d) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

(e) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

(f) $\sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+1} - a_1$

(g) $\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$

(h) $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$

(i) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$