

Algebra

Der englische Mathematiker GEORGE BOOLE (1815-1864) entwickelte in seinem Buch „The Laws of Thought“ zur systematischen Behandlung der Logik eine algebraische Struktur, die heute als *Boolesche Algebra* bekannt ist. Die *Schaltalgebra* ist eine wichtige Anwendung der Booleschen Algebra im technischen Bereich und dient zur Beschreibung und Untersuchung logischer Schaltungen und somit zur Entwicklung automatischer Steuerungen und elektronischer Rechenanlagen.

Als Variable von Schaltungen treten meist nur binäre Variable (mit den Werten 0 oder 1) auf.

Den Wert am Ausgang einer Schaltung stellt man häufig als *Funktionswert* dar. Die Funktion kann mit einer *Funktionstabelle* veranschaulicht werden. Ein Beispiel (E_1 und E_2 sind Eingänge, A der Ausgang):

E_1	E_2	A
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

In boolescher Schreibweise kann man den Funktionswert auch folgendermaßen schreiben¹:

$$A = (\overline{E_1} \wedge \overline{E_2}) \vee (E_1 \wedge \overline{E_2}) \vee (E_1 \wedge E_2)$$

Aufgaben:

1. Lies die angegebene Zeile vor.
2. Übersetze die angegebene Zeile in angemessene deutsche Sprache.
3. Wie lautet jeweils der Funktionsterm für die Grundschaltungen?

AND

OR

XOR

NAND

NOR

NOT

¹ \vee ist das logische *oder*, \wedge das logische *und* und der Querstrich die Verneinung.

Problem

Eine Maschine soll so überwacht werden, dass ein Warnsignal ($W=1$) abgegeben wird, wenn eine Störung eintritt ($S=1$) und während der Störung der Aufsichtsposten nicht besetzt ist ($A=0$) und eine Resettaste nicht gedrückt ist ($R=0$). Weiterhin soll das Warnsignal gegeben werden, wenn die Resettaste betätigt ist, obwohl keine Störung vorliegt.

Das Warnsignal W hängt von den drei Variablen S , A und R ab. Die Funktion kann in einer Funktionstabelle dargestellt werden.

	S	A	R	W
Zeile 0	0	0	0	
Zeile 1	0	0	1	
Zeile 2	0	1	0	
Zeile 3	0	1	1	
Zeile 4	1	0	0	
Zeile 5	1	0	1	
Zeile 6	1	1	0	
Zeile 7	1	1	1	

Aufgaben:

1. Bestimme die Funktionswerte bzw. vervollständige die Tabelle.
2. Übersetze die Funktionstabelle in die boolesche Schreibweise.
3. Ersetze die logischen Zeichen durch Schaltungselemente und baue die Schaltung direkt auf (Skizze!).

Gesetze der Schaltalgebra

Viele Ausdrücke lassen sich mit Hilfe der folgenden Gesetze vereinfachen. Mit A , B und C sind **Schaltungsvariable** bezeichnet.

Kommutativgesetze:	$A \wedge B = B \wedge A$
	$A \vee B = B \vee A$
Assoziativgesetze:	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
Distributivgesetze:	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Idempotenzgesetze:	$A \wedge A = A$
	$A \vee A = A$
Komplementgesetze:	$A \wedge \bar{A} = 0$
	$A \vee \bar{A} = 1$
Gesetz der doppelten Negation:	$\overline{\bar{A}} = A$
Absorptionsgesetze:	$A \wedge (A \vee B) = A$
	$A \vee (A \wedge B) = A$
Gesetze von DE MORGAN:	$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$
	$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$
Sonstige Gesetze mit 0 und 1:	$A \wedge 0 = 0$ $A \wedge 1 = A$
	$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$
	$\bar{0} = 1$ $\bar{1} = 0$

Aufgaben:

1. Formuliere – wenn möglich – entsprechende Gesetze für Zahlen in der Mathematik.
2. In der obigen Tabelle findest Du
 - (a) Assoziativgesetze. Weise die Gültigkeit eines Gesetzes mit Schaltungen nach.
 - (b) Distributivgesetze. Weise die Gültigkeit eines Gesetzes mit Schaltungen nach.
 - (c) Gesetze von DE MORGAN. Weise die Gültigkeit beider Gesetze mit Schaltungen nach.

Übungen:

1. An einem Stromnetz sind 4 Verbraucher angeschlossen, die die in der Tabelle angegebenen Leistungen benötigen.

Verbraucher	a	b	c	d
benötigte Leistung in kW	20	15	10	5

Maximal ist jedoch lediglich eine Leistung von 30 kW erlaubt. Es muss also festgestellt werden, unter welchen Bedingungen ein Verbraucher zugeschaltet werden kann. In der Tabelle sind die Eingangsvariablen a , b , c und d und die Ausgangsvariablen A , B , C und D dargestellt. Z.B. soll eine 1 am Ausgang B bedeuten, dass er zugeschaltet werden kann.

a	b	c	d	A	B	C	D
0	0	0	0				
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0				
1	1	1	1				

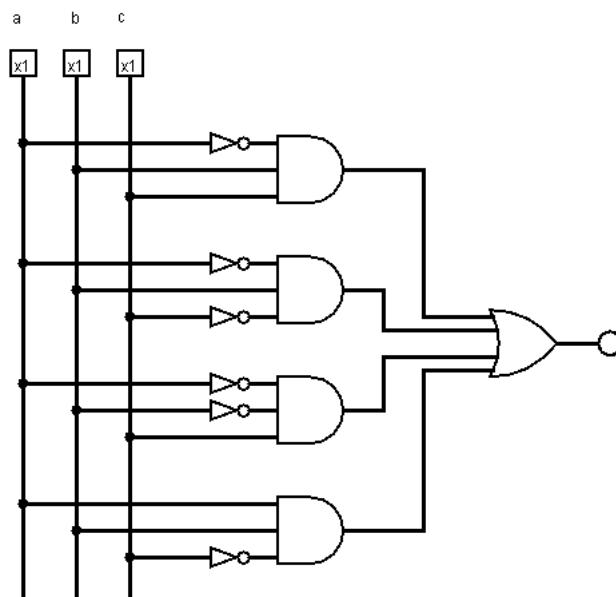
- (a) Vervollständige die Tabelle.
 - (b) Schreibe für jeden Ausgang die zugehörige logische Funktion auf.
 - (c) Erstelle mit Hilfe der Funktionen die zugehörige Schaltung mit einem Simulationsprogramm.
2. Für eine Person gibt die Funktion *GuteLaune* an, ob diese gerade gut gelaunt ist oder eben nicht. Dabei hängt *GuteLaune* folgendermaßen von den Variablen *Strafzettel*, *Frühstück*, *Ausgeschlafen* und *Hundehaufen* ab:
 - Falls die Person einen Strafzettel erhält, ist die Laune unabhängig von allen anderen Eingaben schlecht.
 - Ein gutes Frühstück sowie langes Ausschlafen sorgen jeweils für gute Laune.
 - Der Tritt in einen Hundehaufen kann die gute Laune des Ausschlafens zu Fall bringen, nicht jedoch die des guten Frühstücks.
 - Die Grundstimmung der immer optimistischen Person ist positiv.

<i>Strafzettel</i>	<i>Frühstück</i>	<i>Ausgeschlafen</i>	<i>Hundehaufen</i>	<i>GuteLaune</i>
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

3. Um festzustellen, ob Daten (z.B. im Internet) richtig übertragen wurden, ist es üblich, sogenannte Prüfbits mitzusenden. Dabei gibt das Prüfbit lediglich an, ob die Anzahl der gesendeten „Einsen“ gerade (Prüfbit 0) oder ungerade (Prüfbit 1) ist.
- (a) Vervollständige die Spalte 5 in der untenstehenden Wahrheitstafel.
- (b) Entwickle eine Schaltung, die zu einer Vier-Bit-Binärzahl das Prüfbit bestimmt (Durch Nachdenken lässt sich auch eine sehr einfache Schaltung entwickeln!).
4. Fertige nach Vervollständigung der Wahrheitstafel eine Schaltung an, die bei einer Vier-Bit-Binärzahl feststellt, ob sie durch 3 teilbar ist.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	Prüfbit	durch 3 teilbar
0	0	0	0		
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		
1	0	1	0		
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	0	1		
1	1	1	0		
1	1	1	1		

5. In der unten dargestellten Schaltung sind auch AND- und OR-Gatter mit mehr als zwei Eingängen vorhanden. Die drei Eingänge sind mit a , b und c bezeichnet, der Ausgang sei x .



- (a) Gib den zur Schaltung gehörigen Funktionsterm für x an:

$x =$

- (b) Stelle die Schaltung in Form einer Tabelle dar:

a	b	c	x

- (c) Begründe: $(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) = A$. Finde Terme dieser Struktur im Funktionsterm und vereinfache ihn damit.
- (d) Zeichne die optimierte Schaltung.