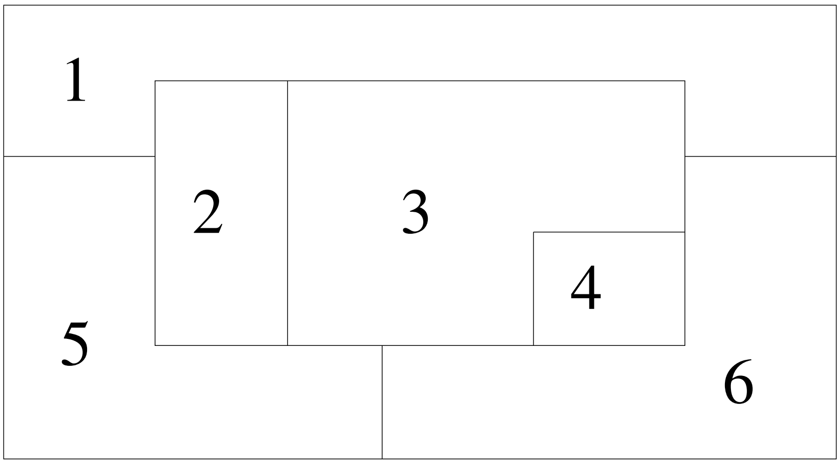
Vier-Farben-Problem

Problemstellung



Die Graphik soll eine Landkarte mit sechs Ländern und ihren Grenzen darstellen. Die Flächen sollen mit vier Farben so gefärbt werden, dass benachbarte Länder immer unterschiedliche Farben bekommen. Die Länder seien der Einfachheit halber mit den Zahlen 1 bis 6 nummeriert. Als Farben seien **R**ot, **G**rün, **B**lau und **W**eiß angenommen. Eine mögliche Lösung wäre dann RBWGGB (Land 1 Rot, Land 2 Blau,...). Es sollen alle Lösungen zum Färben der angegebenen Landkarte gefunden werden. Da die Farbwahl willkürlich ist, genügt es, das Land 1 mit einer festen Farbe zu färben und dafür alle Lösungen für das Färben der anderen Länder anzugeben. Das Programm soll eine einfache Anpassung an andere Karten ermöglichen. Zusatzaufgaben:

1. Kommt man bei der dargestellten Karte mit drei Farben aus?
2. Zeichne eine möglichst einfache Karte, die vier Farben benötigt.

Zum Hintergrund:

Der englische Teilzeitmathematiker Francis Guthrie stellte im Oktober 1852 fest, dass er mit nur vier Farben eine Karte der britischen Grafschaften einfärben konnte und daher nie die gleiche Farbe für benachbarte Grafschaften verwenden musste. Das führte ihn zu der Frage, ob es überhaupt eine mögliche Karte gab, die mehr als vier Farben erforderte. Manche Karten konnten auch mit nur drei Farben angelegt werden. Er konnte das Problem nicht lösen, sprach aber darüber mit seinem jüngeren Bruder Frederick, einem Studenten am Londoner University College. Dieser legte es seinem Professor, dem angesehenen Augustus de Morgan vor, der wiederum am 23. Oktober an den großen irischen Mathematiker und Physiker WILLIAM ROWAN HAMILTON schrieb. HAMILTON konnte auch keine Karte entwerfen, die fünf Farben erforderte, war aber auch nicht in der Lage zu beweisen, dass es eine solche nicht gibt.

Die Kunde von dem Problem verbreitete sich rasch in ganz Europa. HERMANN MINKOWSKI verkündete in einer Anwandlung von Hochmut, es sei nur deshalb noch nicht gelöst, weil es bislang nur drittklassige Mathematiker versucht hätten. Doch am Ende scheiterten auch seine Bemühungen. „Der Himmel ist erzürnt über meinen Hochmut", verkündete er. In den nächsten mehr als hundert Jahren bissen sich viele Mathematiker die Zähne an diesem Problem aus.
Im Jahre 1976 präsentierten zwei Mathematiker von der Universität Illinois, WOLFGANG HAKEN und KENNETH APPEL, ein neues Verfahren, das den Begriff des mathematischen Beweises revolutionieren sollte. Sie konnten durch mathematische Überlegungen nachweisen, dass sich jede beliebige Karte auf 1482 elementare Konfigurationen zurück führen ließ. Der Beweis war darauf zurück geführt, dass man noch für diese 1482 Karten nachweisen musste, dass vier Farben ausreichen. Bereits fünf Jahre hatten sie auch daran gearbeitet, ein Computerprogramm so zu optimieren, dass es diese Aufgabe bewältigen konnte. Im Juni 1976, nach 1200 Stunden Rechenzeit, konnten HAKEN und APPEL verkünden, dass alle Karten überprüft waren und keine Karte mehr als vier Farben verlangte.
Zum ersten Mal in der Geschichte der Mathematik hatte ein Computer einen entscheidenden Anteil an einem Beweis. Es führte aber auch zu einem Unbehagen in weiten Kreisen der Mathematiker, weil es keine Möglichkeit gab, den Beweis im herkömmlichen Sinne zu überprüfen[1].

Aufgaben:

1. Entwirf einen Algorithmus zur Lösung des oben angegebenen Problems. Orientiere Dich dabei an den Ideen, die beim „Haus des Nikolaus" entwickelt wurden.

2. **Schwierig!** Sondere die unnötigen Lösungen aus, d.h. stelle nur die Lösungen ohne Permutationen der Farben dar. Dazu habe ich selbst (noch) keine Lösung.

[1]Quelle: SIMON SINGH, Fermats letzter Satz - Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels; dtv; ISBN 3-432-33052-X; Sehr empfehlenswertes Buch!